
Carla Accardi. Zerynthia 2010.

IL CONCETTO GENERALE DI TRASFORMAZIONE.

Par ma foi, il y a plus de quarante
ans que je dis de la prose, sans que
j'en susse rien....
[Molière. Le bourgeois gentilhomme. Acte II, scène 5]

1 - Trasformazione, termine generico.

Il termine " *Trasformazione* ", come moltissimi altri, è impiegato nel linguaggio comune ed ha molti significati spesso abbastanza distanti tra loro; per esempio, nel "Novissimo dizionario della lingua italiana" di Ferdinando Palazzi, alla voce "Trasformazione" si trovano elencati i seguenti significati: cambiamento, mutamento, trasfiguramento, trasfigurazione, rinnovamento, reintegrazione, metamorfosi, palingenesi. Ovviamente, nel discorso e nello scritto, la scelta di uno tra questi viene fatta in base al contesto. Tuttavia vorremmo osservare che, quale che sia la molteplicità di significati che il termine assume nel linguaggio comune, esistono tra i significati stessi delle analogie, che guidano all'impiego del termine in contesti matematici. Si legge infatti, e si sente dire per esempio che "*…il bruco si trasforma in farfalla*", oppure che "*...il bambino si è trasformato in un robusto atleta*", oppure che "*...il virgulto si trasforma in un grosso albero*", ed altre frasi dello stesso tipo. Su queste frasi si potrebbero fare alcune osservazioni: anzitutto esse hanno un’ambientazione temporale; in altre parole esse tendono a descrivere delle situazioni in cui ha senso parlare di un "prima" e di un "poi"; in secondo luogo in esse si accenna ad un cambiamento di forma esteriore, la quale muta nel passaggio da uno stato per così dire iniziale ad uno finale; ed infine nel concetto di trasformazione vi è, sottostante, anche una connotazione di permanenza: infatti, per esempio, il bambino che si è trasformato in un robusto atleta è pur sempre lo stesso soggetto umano che noi abbiamo conosciuto giovane; e cose analoghe si potrebbero dire a proposito degli altri esempi.

In particolare vorremmo qui osservare che al concetto di trasformazione si può dar senso anche in contesti diversi da quelli richiamati dagli esempi ora addotti. Un esempio che più ci interessa ora, e di cui ci occuperemo anche nel seguito, è quello in cui il concetto di trasformazione viene applicato non ad oggetti o a figure geometriche, ma a proposizioni. È questo il caso che spesso viene considerato nella analisi delle procedure logiche per la dimostrazione di proposizioni matematiche o per la soluzione di un problema.

In questo ordine di idee ci pare opportuno citare qui una pagina in cui il matematico italiano F. Enriques [1871-1946] espone in forma sintetica l'analisi che il pensiero greco aveva fatto delle procedure logiche della matematica.

“ La scuola di Platone - scrive Enriques -, e poi di Eudosso, dà un particolare significato logico e metodologico al procedimento di " *analisi* " che si mette in opera nella risoluzione dei problemi geometrici. In questa "analisi" si comincia a supporre che il problema proposto P sia risoluto e si deducono successivamente le condizioni a cui debbono soddisfare gli elementi cercati, trasformando il problema dato in una serie di problemi, ciascuno dei quali venga risolto in forza del precedente, fin che si arrivi ad un problema R che si sappia risolvere...” [1].

Come si vede, qui il matematico italiano parla di "trasformare" un problema in un altro; ovviamente questa operazione è regolata dalla logica deduttiva; e ad essa corrisponde anche una trasformazione delle proposizioni che presentano i ragionamenti svolti; anzi si realizza mediante questa seconda trasformazione.

Le cose dette si applicano in particolare ai casi in cui si sia in presenza di relazioni matematiche (in particolare equazioni); in questi casi la deduzione viene eseguita trasformando le relazioni mediante le regole formali dell'algebra o dell'analisi matematica; in questo ordine di idee tali regole possono essere viste come particolari regole di sintassi, molte analoghe alle regole di logica con cui vengono manipolate le proposizioni di un linguaggio quando si opera una deduzione. Come abbiamo detto, l'argomento sarà da noi ripreso nel seguito, e in particolare quando analizzeremo da questo punto di vista il concetto di "simmetria", cercando di vedere come, in quante circostanze ed in quanti modi anche questo concetto venga utilizzato. Per il momento analizzeremo qui la utilizzazione del concetto di trasformazione e del termine corrispondente in geometria, ed anche in generale nel linguaggio matematico.

2 - Le trasformazioni in matematica.

Dagli aspetti generici del concetto generico di trasformazione partiremo per utilizzare nel seguito il concetto stesso in matematica; ciò tuttavia richiede delle precisazioni rigorose, necessarie spesso nel passaggio di un termine dall'impiego generico nel linguaggio comune a quello del linguaggio scientifico specializzato ed in particolare nel linguaggio matematico.

Sia U un insieme non vuoto (per esempio una figura oppure anche un solo punto) di uno spazio, e sia f una corrispondenza che applica (ovvero rappresenta) U su un insieme U': si suole scrivere simbolicamente: $f: U \rightarrow U'$.

Converremo qui di dire che f è una trasformazione di U in U' se f è una corrispondenza biunivoca (*bijezione*). In particolare, se gli insiemi U ed U' appartengono a due spazi, su ognuno dei quali è stabilita una topologia, è possibile definire una trasformazione come continua, con le clausole abituali. Pertanto in questa accezione il concetto di trasformazione può essere considerato come coincidente con quello di corrispondenza biunivoca; tuttavia, soprattutto in geometria, si preferisce utilizzare il termine "trasformazione" perché esso porta con sé anche delle connotazioni temporali, come si è detto sopra, e quindi richiama anche certe operazioni che si possono eseguire al fine di risolvere problemi geometrici, e che sono logicamente ordinate secondo una gerarchia che richiama un ordinamento temporale.

3 - Gruppi di trasformazioni.

Supponiamo ora che gli insiemi U ed U' appartengano a due spazi, sui quali sia possibile instaurare una topologia, che consenta di parlare di continuità. In queste ipotesi, come abbiamo detto, è possibile dar senso al concetto di trasformazione continua tra due aperti, appartenenti a due spazi, oppure in particolare al concetto di trasformazione continua di uno spazio su se stesso. Sono questi i casi nei quali verrà applicato il concetto di trasformazione per quanto riguarda la geometria, come vedremo in seguito. Supponiamo inoltre in particolare che il dominio ed il codominio della corrispondenza generata dalla trasformazione coincidano; in altre parole che la corrispondenza porti un aperto U di uno spazio su se stesso. È chiaro che se si hanno due trasformazioni di questo tipo anche il loro prodotto (cioè l'applicazione successiva di due corrispondenze cosiffatte) ancora porta U su se stesso. Possiamo infine osservare che le ipotesi ammesse permettono di prendere in considerazione la corrispondenza identica, e la corrispondenza inversa di una data. Si giunge così al concetto di "*Gruppo di trasformazioni*" di un aperto U di uno spazio su se stesso. Il concetto di "gruppo" è ben noto dall'algebra; tuttavia ne richiamiamo qui sommariamente le proprietà più importanti e ne ricordiamo alcune convenzioni abituali di simbolizzazione.

Consideriamo un insieme Γ; di qui in avanti supporremo che Γ contenga più di un elemento, ed indicheremo i suoi elementi con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino:

(1) $\quad A, B, C, D, \ldots$

In particolare riserveremo la lettera E [iniziale della parola tedesca "*Einheit*" (unità)] per indicare un elemento privilegiato, del quale diremo tra poco, che supporremo appartenere all'insieme e che viene abitualmente chiamato "*elemento neutro*" del gruppo.

L'insieme Γ viene chiamato "*gruppo*" se esiste una operazione di composizione interna, che verrà anche spesso chiamata "*prodotto*", la quale associa ad una qualunque coppia ordinata di elementi A, B, un terzo elemento ben determinato C, il quale verrà pure chiamato "prodotto" dei due elementi A e B. Per indicare che l'elemento C si ottiene dal prodotto di A e B , si suole scrivere:

(2) $\quad C = A*B;$

spesso addirittura al posto della scrittura simbolica (2) si scrive semplicemente:

(3) $\quad C = AB.$

Si suppone che la sintassi dell'operazione di composizione sia data dalle seguenti regole:

I) Quali che siano gli elementi A, B, C,... si ha:

(4) $(AB)C = A(BC)$;
si suole esprimere in parole il contenuto della (4) dicendo che l'operazione di composizione è "*associativa*".

OSSERVAZIONE 1 - Non è in generale vero che per ogni coppia di elementi A e B si abbia:
(5) $AB = BA$.
Se ciò avviene per una determinata coppia di elementi si suol dire che essi "commutano"; se ciò avviene per ogni coppia di elementi del gruppo si dice che questo è "*commutativo*" oppure anche "*abeliano*". In questo caso l'operazione di composizione di due elementi A e B viene spesso indicata interponendo il simbolo " + " tra i due simboli, e quindi scrivendo:
(6) $C = A+B$,
la legge:
(7) $A+B = B+A$.

II) Esiste in Γ un elemento privilegiato, indicato con E e chiamato "*elemento neutro*", per il quale si ha, qualunque sia A:
(8) $AE = EA = A$,
e quindi ovviamente, in particolare:
(8)bis $EE = E$.

III) Dato un qualunque elemento A di Γ, esiste un elemento, che viene chiamato "*inverso di A*" e che viene indicato abitualmente "A^{-1}", tale che si abbia:
(9) $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

OSSERVAZIONE 2 - Si ha ovviamente:
(10) $E^{-1} = E$,
ed anche:
(11) $(A^{-1})^{-1} = A$.

OSSERVAZIONE 3 - Nel caso in cui il gruppo Γ sia abeliano e l'operazione di composizione sia indicata con il simbolo (6), l'elemento neutro viene indicato con il simbolo "0" (*zero*) e l'elemento inverso di un elemento A viene indicato con il simbolo "$-A$", avendosi dunque, con queste notazioni:
(12) $A + 0 = A \quad ; \quad A - A = 0$.

OSSERVAZIONE 4 - Indicato con n un numero naturale, è possibile considerare la potenza di un elemento A secondo n, che sarà indicata con il simbolo:
(13) A^n.
Indicando con m ancora un numero naturale, si ha ovviamente:
(14) $A^m A^n = A^{m+n}$;
e in un gruppo abeliano si conviene di porre:
(15) $0 = E$.

Dopo aver richiamato le proprietà fondamentali riguardanti il concetto di gruppo, possiamo applicarle al caso, che ci interessa qui, in cui gli elementi del gruppo Γ siano trasformazioni di un insieme U su se stesso, cioè operazioni che operano sugli elementi di U portandoli in altri elementi di U stesso. In particolare supporremo che U contenga più di un elemento, ed indichiamo gli elementi di U con le lettere minuscole dell'alfabeto latino, come:
(16) $a, b, c, ..., a', b', c', ... x, y, z, ... x', y', z', ...$
Considerato un elemento qualunque x di U ed un'operazione A di Γ, indicheremo convenzionalmente con il simbolo:

(17) xA

l'elemento di U in cui l'operazione A porta l'elemento x; in altre parole, scrivendo:

(18) $x' = xA$

indicheremo che l'elemento x è portato dall'operazione A nell'elemento x'.

OSSERVAZIONE 5 - La convenzione qui adottata, di scrivere il simbolo dell'operazione dopo il simbolo dell'elemento sul quale essa opera, è diversa da quella abitualmente utilizzata in Analisi matematica, ma non è completamente inusitata, e soprattutto non è contraddittoria né errata. Infatti, per esempio, in analisi matematica si scrive abitualmente "*log x*" per indicare l'operazione che conduce dal numero reale x al suo logaritmo; ma, indicato con n un numero naturale, si scrive anche "*n!* " per indicare l'operazione che conduce da n al suo fattoriale.

Del resto si incontra un fenomeno analogo anche presso le varie lingue: si consideri, per esempio, l'operazione di negazione dell'azione espressa da un verbo. L'italiano dice "*Io non so*" , ma il tedesco dice " *Ich weiss nicht*", mettendo l'operatore di negazione dopo il verbo; ed il francese dice addirittura "Je ne sais pas", ponendo quindi l'operatore di negazione in parte prima ed in parte dopo il verbo [ne… pas]. La convenzione che qui adottiamo presenta il vantaggio di indicare le operazioni nello stesso ordine in cui esse vengono eseguite.

L'elemento E di Γ sarà scelto per indicare l'operazione identica; si avrà cioè, quale che sia l'elemento x di U:

(19) $xE = x$;

l'operazione di composizione in Γ sarà scelta per indicare la composizione (cioè l'applicazione successiva) delle due operazioni; si avrà cioè:

(20) $xAB = (xA)B$.

Quindi se è:

(21) $x' = xA$,

si avrà:

(22) $x = x'A^{-1}$.

4 - Classi di equivalenza di elementi di un insieme.

Sia dato un insieme U, che sia un aperto di uno spazio di Haussdorff.

Sia Γ un gruppo di trasformazioni continue di U su se stesso, e supponiamo che Γ contenga almeno due elementi, e quindi non sia costituito dalla sola trasformazione identica. Consideriamo un elemento qualunque x di U, e supponiamo di applicare ad x tutte le operazioni di Γ; indichiamo con $V(x)$ l'insieme di tutti questi elementi di U; esso è ovviamente un sottoinsieme di U, che supponiamo sia un sottoinsieme proprio, cioè non coincida con U stesso. Esisterà quindi almeno un elemento y di U che non appartiene a $V(x)$, ed in corrispondenza a questo possiamo considerare l'insieme $V(y)$ di tutti gli elementi di U che si ottengono applicando ad y tutte le operazioni di Γ.

Supponiamo che esista un elemento z di U che non appartiene né a $V(x)$ né a $V(y)$, e consideriamo $V(z)$; se immaginiamo di ripetere le considerazioni precedenti rispetto a tutti gli elementi di U possiamo identificare un insieme U' di sottoinsiemi di U, che possiamo chiamare "*insieme quoziente di U rispetto al gruppo Γ*" e che indicheremo con il simbolo:

(1) $U' = U/\Gamma$.

In forza di quanto abbiamo detto finora, si accerta facilmente che per l'insieme U' valgono le seguenti proprietà:

I) Ogni elemento di U appartiene ad uno e un solo elemento di U'.

II) Due diversi elementi di U' non hanno alcun elemento di U in comune.

Gli elementi di U' vengono anche chiamati “*classi di equivalenza di elementi di U* ”, rispetto al gruppo Γ di trasformazioni. Possiamo scrivere convenzionalmente:

(2) *x' ð x* *(mod Γ)*

per indicare che i due elementi x ed x' appartengono alla stessa classe di equivalenza rispetto a Γ [2]. Si verifica che per la relazione indicata con la scrittura simbolica (2) valgono le classiche proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva, che qualificano le relazioni che qualche logico ha chiamato "*equaliformi* ".
Infatti per definizione la validità della (2) ha il significato della validità della (21) del paragrafo precedente. Ma la (21) e la (22) sono logicamente equivalenti, cioè si deducono l'una dall'altra. Quindi, secondo le notazioni qui introdotte, dalla (2) si deduce la:

(3) $x\ ð\ x'$.

Quindi per la relazione qui indicata con il simbolo "*ð* " vale la proprietà simmetrica. La proprietà riflessiva, espressa dalla formula:

(4) $x\ ð\ x$

è chiaramente espressa dalla (19) del paragrafo precedente. Supponiamo infine che valga la (21) del paragrafo precedente, e che inoltre esista una operazione B di Γ tale che sia:

(5) $x'' = x'B$;

allora, dalla (21) ora citata e dalla (5), si ottiene:

(6) $x'' = xAB$.

Ma la (21) citata equivale alla (2), e la (5) può essere scritta nella forma:

(7) $x''\ ð\ x'$,

ed infine la (6) può essere scritta nella forma:

(8) $x''\ ð\ x$.

Si vede così che dalla (2) e dalla (7) discende la (8); il che viene espresso abitualmente dicendo che per la relazione "*ð* " vale la proprietà *transitiva*.

Pertanto la esistenza di un gruppo di trasformazioni di U su se stesso permette di definire una relazione tra coppie di elementi di U, che ha le classiche proprietà formali delle relazioni che vengono da alcuni Autori denominate "*equaliform*i". Si ottiene così il passaggio dalla considerazione di un insieme di operazioni, appartenenti al dominio dell'algebra, ad una struttura di relazione, appartenente piuttosto al dominio della logica.

5 - Le classi di equivalenza in geometria.

È facile osservare che la geometria, fin dalla sua origine, ha considerato classi di equivalenza di elementi di un insieme come oggetti; in particolare ha trattato classi di quegli oggetti mentali che sono chiamati abitualmente "figure geometriche". Tali classi di equivalenza sono costituite in base ai gruppi di certe trasformazioni che la geometria tradizionale ha sempre eseguito senza soffermarsi a riflettere sulle loro proprietà, che sono sempre state accettate come evidenti. Ciò si accetta ancora oggi nella manualistica e nella didattica elementare; infatti è pratica comune il tracciare disegni come suol dirsi "in scala", per rappresentare simbolicamente gli enti che si studiano. È anche pratica comune l'immaginare di trasportare e manipolare gli oggetti materiali che si considerano rigidi; tali cioè che le nostre manipolazioni non modifichino le proprietà geometriche che interessano.

La giustificazione abitualmente addotta di questi comportamenti, fa riferimento al fatto che gli oggetti così manipolati danno tutti le stesse informazioni per quanto riguarda la geometria; in altre parole essi sono "equivalenti" in relazione alle proprietà geometriche. Discende di qui l'idea che si possano definire varie relazioni di equivalenza in corrispondenza ai gruppi di trasformazioni che si considerano; quindi che, in generale, gruppi diversi possano dar luogo a diverse relazioni di equivalenza.

Queste osservazioni permettono di prevedere che esistano diverse "geometrie", cioè diversi modi di classificare gli oggetti della nostra esperienza che danno luogo ai concetti geometrici. Un passo ulteriore verso la costruzione dei concetti geometrici può essere fatto osservando che, una volta costruite le classi di equivalenza rispetto ad un dato gruppo Γ, tutti gli elementi di una medesima classe vengono ad avere "qualche cosa" in comune; questo "qualche cosa" non cambia quando un elemento di una classe viene trasformato con una operazione del gruppo; si suol dire che gli elementi di una stessa classe hanno in comune certe proprietà che non cambiano per le operazioni del gruppo; si usa esprimere convenzionalmente questo fatto dicendo che tali proprietà sono gli "*invarianti*" del gruppo stesso.

Per esempio, in geometria elementare, se prendiamo in considerazione il gruppo dei movimenti rigidi, ogni segmento rettilineo appartiene ad una classe di equivalenza; essa è costituita da tutti i segmenti rettilinei che possono essere portati a coincidere con il segmento dato con un movimento rigido; e tutti questi segmenti hanno in comune una proprietà che potrebbe essere chiamata per esempio "lunghezza", del segmento dato e di ogni altro che appartiene alla stessa classe.

Se prendiamo in considerazione il gruppo delle similitudini, e fissiamo l'attenzione su una data ellisse, questa determina una classe di equivalenza di curve ognuna delle quali è simile ad un'altra qualsivoglia della classe; è noto che la proprietà che tutte queste curve hanno in comune viene chiamata "eccentricità" della ellisse data e di tutte quelle della classe così determinata. Gli esempi concreti potrebbero essere moltiplicati; ed una facile riflessione potrebbe convincerci che la costruzione di classi di equivalenza rispetto a determinati gruppi di operazioni è una procedura frequentissima in ogni ramo della matematica, pura ed applicata.

Nell'ambito della geometria, il concetto di "*invariante*" per un gruppo era alla base di molte costruzioni concettuali della geometria classica a livello intuitivo, senza essere esplicitamente espresso; tuttavia oggi viene metodicamente invocato, soprattutto per chiarire i rapporti che le varie "geometrie" possibili hanno tra di loro.

Questa analisi è stata iniziata dalla nota memoria che Felix Klein pronunciò [nel 1872] come introduzione programmatica ai suoi corsi presso l'Università di Erlangen; memoria che viene spesso chiamata "*Programma di Erlangen*" [3]. I concetti esposti fin qui possono essere utilizzati nelle procedure di dimostrazione delle proprietà geometriche delle figure, oppure nelle procedure seguite per la soluzione di certi problemi.

Un atteggiamento cosiffatto fonda quello che viene talvolta indicato come "*Metodo di Poncelet*" per le dimostrazioni oppure per la soluzione di problemi di geometria proiettiva. Tale metodo potrebbe essere descritto dicendo che la dimostrazione delle proprietà proiettive delle figure viene ottenuta partendo da certe proprietà dimostrate con i metodi della geometria elementare; tali metodi conducono abitualmente a proposizioni la cui validità, nelle consuete formulazioni, non si estende al di là dell'ambito della geometria euclidea elementare, nella quale sono stati elaborati; tuttavia è possibile, per così dire, "leggere" le proprietà in termini di invarianti proiettivi. Di conseguenza si giunge così alla dimostrazione di proprietà proiettive delle figure considerate, cioè di proprietà che sono valide al di fuori dell'ambito di validità delle procedure utilizzate per la dimostrazione delle proprietà in parola in relazione ad una figura particolare.

[1] Federigo Enriques. In: Enciclopedia italiana, Istituto G. Treccani, voce "Analisi", vol. 3, pag.86.

[2] È noto che la relazione di equivalenza viene abitualmente indicata nei trattati scrivendo "$x' \equiv x$". Ma qui abbiamo volutamente scelto un simbolo inusitato per evitare confusioni.

[3] Il titolo originale tedesco è:"Vergleichende Bemerckungen Über neuere geometrische Forschungen" [tradotto in italiano da Gino Fano col titolo "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti, *Annali mat. Pura e appl.* (2) **17** (1890), 307-343.]*

NdR File reimpaginato febbraio 2013

(*) L'articolo è disponibile in Rete nell'ambito del progetto
I Grandi Matematici Italiani online
GINO FANO. Felix Klein. Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti. Annali Mat. Pura Appl., Serie 2, Vol.17(1890), p. 307-343
Fano's translation of Erlangen Program

http://www.bdim.eu/item?id=GM_Fano_1890_1
Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/